Capítulo 2

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Definição:

Matriz é um quadro de números, denominados **entradas da matriz**, dispostos em m linhas e n colunas, e por isso diz-se que a **matriz é de tamanho** $m \times n$ (ou de tipo $m \times n$).

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

tamanho 3×2 matriz linha $1 \times n$ matriz coluna $m \times 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$ matriz quadrada tipo $n \times n$ ou ordem n

Notação:

A notação para uma matriz A de tipo $m \times n$ (em primeiro lugar temos o número de linhas e depois o número de colunas) é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

a_{ij} ou A_{ij}

é o elemento que ocupa a **posição** ou a **entrada** (i, j)
= encontra-se na linha i e coluna j

$$A = [a_{ij}]$$

Definição:

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n.
Os elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ formam a **diagonal principal** da matriz A.

- Matriz **diagonal** (os elementos fora da diagonal principal são nulos)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_n$$

"Matriz nula de ordem 3"

- Matriz **escalar** (é diagonal e os elementos da diagonal principal são todos iguais)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

"Matriz Identidade de ordem 3"

Matriz **triangular superior** (as entradas abaixo da diagonal principal são nulos)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz **triangular inferior**

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definição:

Duas matrizes A e B dizem-se iguais se tiverem o mesmo tamanho e as entradas correspondentes iguais. Neste caso, escrevemos $A = B$.

$A_{ij}=B_{ij}$
para $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$

Soma de Matrizes

- Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (3 \times 2)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+5 & -1+2 \\ 3+2 & 0+2 \\ -1+0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obs: Só se somam matrizes do mesmo tipo.

- Seja $\alpha = 3$, como definir αA **?**

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \times 2 & 3 \times (-1) \\ 3 \times 3 & 3 \times 0 \\ 3 \times (-1) & 3 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Definição:

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes de tipo $m \times n$. A soma da matriz A com a matriz B, que se denota por $A + B$, é a matriz de tipo $m \times n$ cuja entrada (i, j) é o elemento $a_{ij} + b_{ij}$, isto é,

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Sejam $A = [a_{ij}]$ uma matriz de tipo $m \times n$ e α um escalar. O produto αA é a matriz de tipo $m \times n$ que se obtém multiplicando cada entrada de A por α, isto é,

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha (A)_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Proposição:

Sejam A, B, C matrizes de tipo $m \times n$ e α, β escalares. Tem-se:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
5. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
6. $(-\alpha)A = -(\alpha A) = \alpha(-A)$ *em que* $-A$ *significa* $(-1)A$.

Produto de Matrizes

❶ Produto por um matriz coluna:

Uma matriz pode ser subdividida em matrizes coluna

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array}\right]$$

em que $C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{bmatrix}$ é a j-ésima coluna de A, com $j = 1, 2, 3, 4$.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad AX = \ ? \ = x_1 C1 + x_2 C_2 + x_3 C_3 + x_4 C_4$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 a_{11} \\ x_1 a_{21} \\ x_1 a_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 a_{12} \\ x_2 a_{22} \\ x_2 a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 a_{13} \\ x_3 a_{23} \\ x_3 a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_4 a_{14} \\ x_4 a_{24} \\ x_4 a_{34} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + x_3 a_{13} + x_4 a_{14} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 a_{23} + x_4 a_{24} \\ x_1 a_{31} + x_2 a_{32} + x_3 a_{33} + x_4 a_{34} x_4 \end{bmatrix}$$

Definição:

Se A é uma matriz $m \times n$ e X é uma matriz coluna $n \times 1$, então o produto AX é uma matriz coluna $m \times 1$ que resulta da combinação linear das matrizes coluna de A, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, tendo como coeficientes (da combinação linear) as entradas de X, isto é,

$$AX = \left[\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \ldots & C_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \ldots + x_n C_n.$$

Observação:

Considere o sistema de m equações lineares a n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

O sistema anterior pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{AX = B}$$

Produto de duas matrizes: Considerem-se A de tipo $m \times s$
B de tipo $s \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ms} \end{bmatrix} \quad B= \left[\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sn} \end{array}\right]$$

$$AB = A \left[\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sn} \end{array}\right] \qquad \boxed{A_{m\times s}B_{s\times n} = C_{m\times n}}$$

$$= A\,[B_1|\dots|B_n] = [AB_1|\dots|AB_n]$$

Atenção:

- Repare-se que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B para podermos efectuar o produto AB.
- A matriz AB tem tantas linhas quantas as da matriz A e tantas colunas quantas as da matriz B.

Questão: É o produto de Matrizes comutativo?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{AB \neq BA}$$

NÃO

Atenção: Nunca fazer

$$\cancel{AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 & (-1)\times(-1) \\ 0\times 0 & 2\times 1 \end{bmatrix}}.$$

~~A entrada (i,j) da matriz *AB* não é $A_{ij}.B_{ij}$~~

$$\boxed{(AB)_{ij} \neq A_{ij}.B_{ij}}$$

Exercício1: Efectue se possível o produto das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Questão: Conseguimos conhecer a entrada $(AB)_{ij}$ sem efectura o produto das duas matrizes?

A entrada $(AB)_{ij}$ está na j-ésima coluna de AB:

$$AB_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ms} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{bmatrix} =$$

$$= b_{1j} \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + b_{sj} \begin{bmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ms} \end{bmatrix}$$

E, nesta coluna, está na i-ésima linha:

$$(AB)_{ij} = b_{1j} a_{i1} + \dots + b_{sj} a_{is} = [a_{i1} \dots a_{is}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $(AB)_{ij}$ é o produto da i-ésima matriz linha de A pela j-ésima matriz coluna de B.

Exercício2: Determinar $(AB)_{32}$ para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício3: Considere a Matriz identidade I_n e A=[a_{ij}] uma matriz $n \times n$. Efectue o producto I_n A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \ ?$$

Proposição:

Sejam A, B, C três matrizes de tipo adequado por forma a que as operações indicadas se possam efectuar, e α um escalar. Tem-se:

1. $A(BC) = (AB)C$ (associatividade da multiplicação)
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributividade)
3. $(B + C)A = BA + CA$ (distributividade)
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Matriz Transposta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{(2\times 3)} \rightsquigarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{(3\times 2)}$$

Definição:

Seja A uma matriz $m \times n$, então a **matriz transposta de** A, denotada por A^T, é a matriz $n \times m$ que se obtém de A transformando as linhas de A em colunas de A^T, isto é,

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}.$$

Proposição:

Sejam A, B matrizes de tipo adequado por forma a que as operações indicadas se possam efectuar, e α um escalar. Tem-se:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $(\alpha A)^T = \alpha (A)^T$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightsquigarrow A^T = ?$

- $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -5 & 5 & 8 \\ 7 & -8 & 6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow A^T = ?$

Definição:

Uma matriz A diz-se **simétrica** se $A^T = A$, e **hemi-simétrica** (ou **anti-simétrica**) se $A^T = -A$.

Questão:

Quais as matrizes simultaneamente simétricas e hemi-simétricas ?

Proposição:

Sejam A, B matrizes simétricas e α um escalar. Tem-se:

1. A^T *é simétrica*
2. $A + B$ *é simétrica*
3. αA *é simétrica*
4. AB *é simétrica se, e só se,* $AB = BA$.

Matrizes Elementares

Recordar : **Há 3 Transformações elementares nas linhas** 1 2 3

Definição:

Chamamos **matriz elementar** a qualquer matriz que se obtém da matriz identidade efectuando uma e uma só transformação elementar.

Quais das matrizes são elementares?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para que servem estas matrizes?

Proposição:

Sejam A uma matriz do tipo $m \times n$ e E uma matriz elementar de ordem m. Se efectuarmos em A a mesma transformação elementar que transforma I_m em E, obtemos EA.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Efectue a transformação elementar $l_1 \leftrightarrow l2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_1 \leftrightarrow l2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_1 \leftrightarrow l2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E \qquad EA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Efectue a transformação elementar $l_1 \leftrightarrow 3l_1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_1 \leftrightarrow 3l_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_1 \leftrightarrow 3l_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E \qquad EA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Efectue a transformação elementar $l_2 \rightarrow (-2l_1 + l_2)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_2 \rightarrow (l_2 - 2l_1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_2 \rightarrow (l_2 - 2l_1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = E \qquad EA = ?$$

Matrizes Invertíveis

Todo o número real, não nulo, tem um inverso para a multiplicação $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

(Só matrizes quadradas)

Definição:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é **invertível** se existir uma matriz B tal que

$$AB = I_n \text{ e } BA = I_n.$$

Se A não é invertível diz-se singular.

"B é a inversa de A"

A^{-1}=B

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ temos $AB = BA = I_2$

$\therefore$ A é invertível e A^{-1}=B.

? **B é invertível** ?

Exercício3: Averigue se a matriz A é invertível.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obs: Qualquer matriz quadrada com uma linha nula é singular.

Questão: Quantas inversas pode ter uma matriz invertível?

Resposta: Suponha-se que *B* e *C* são inversas de A. Então,

$$AB = BA = I_n \quad , \quad AC = CA = I_n.$$

Assim,

$$C = I_n C = (BA)C = B(AC) = BI_n = B.$$

Algumas Propriedades:

Proposição:

Sejam A e B matrizes invertíveis de ordem n, então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Dem:

Questão:

E a sóma de matrizes invertíveis uma matriz invertível?

Definição:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Define-se

$$A^0 = I_n, \quad A^k = A^{k-1}A, \text{ para } k \in \mathbb{N}.$$

Proposição:

Para quaisquer $r, s \in \mathbb{N}$, A matriz de ordem n, tem-se:

1. $(A^r)^s = A^{rs}$
2. $A^r.A^s = A^{r+s}$

Sejam A uma matriz invertível, α um escalar não nulo e $k \in \mathbb{N}_0$. Então:

1. A^{-1} *é invertível e* $(A^{-1})^{-1} = A$
2. A^k *é invertível e* $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k = A^{-k}$
3. αA *é invertível e* $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$

Exercício4:

A inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Qual a inversa de A^2?

Que matrizes sabemos serem inveríveis?

- $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Matriz diagonal cujas entradas da diagonal principal são não nulas

- $$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  $$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{C}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Matrizes elementares

Proposição:

Seja E uma matriz elementar de ordem n. Então E é invertível, a sua inversa é matriz elementar e

1. *Se E resulta de I_n pela transformação $l_i \longleftrightarrow l_j$, então $E^{-1} = E$.*
2. *Se E resulta de I_n pela transformação $l_i \longrightarrow \alpha l_i$, então E^{-1} resulta de I_n pela transformação $l_i \longrightarrow \frac{1}{\alpha} l_i$.*
3. *Se E resulta de I_n pela transformação $l_i \longrightarrow l_i + \alpha l_j$, então E^{-1} resulta de I_n pela transformação $l_i \longrightarrow l_i - \alpha l_j$.*

Cracterização das matrizes Invertíveis

Teorema:

Seja A uma matriz de ordem n. As afirmações seguintes são equivalentes:

1. *A é invertível*
2. $r(A) = n$
3. *A forma de escada reduzida de A é* I_n
4. *A pode escrever-se como produto de matrizes elementares.*

Exercício5: Averigue se a matriz A é invertível.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) Escreva a matriz A da alínea b) e a sua inversa como o produto de matrizes elementares.

Obtenção da matriz inversa

Questão: Como obter a inversa de um matriz invertível?

Seja A uma matriz invertível de ordem n. Então,

$$A \xrightarrow[\text{K transformações elementares}]{} I_n$$

Mas cada transformação elementar corresponde a multiplicar a esquerda por uma matriz elementar. Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_k$ essas matrizes. Assim,

I

$$\boxed{I_n = E_k \ldots E_2 E_1 A}$$

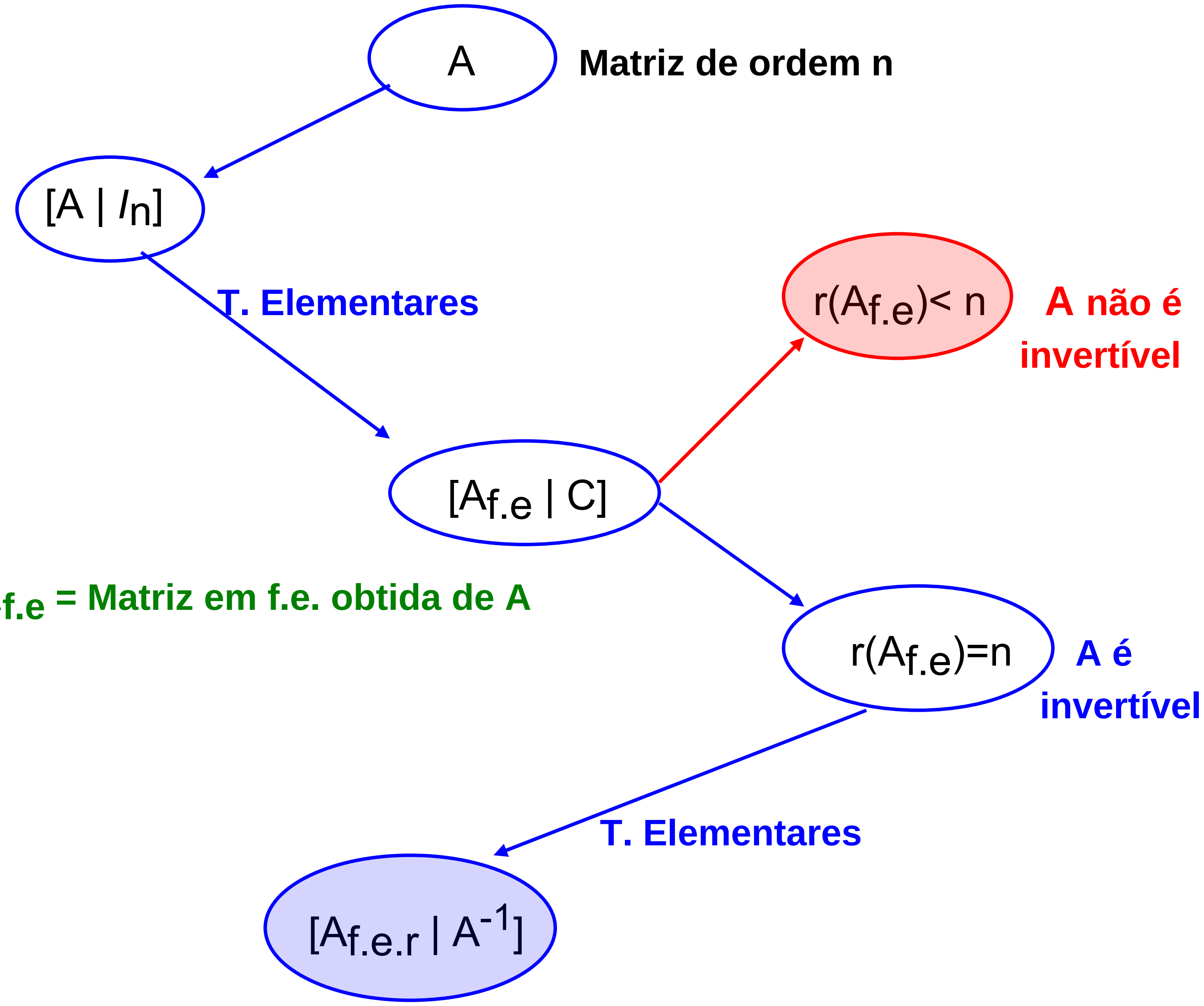
Então,

$$A^{-1} = E_k \ldots E_2 E_1.$$

Além disso,

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}$$

Conclusão: Técnica para averiguar se A é invertível e obter a sua inversa.



$A_{f.e.r}$ = **Matriz em f.e.r. obtida de A=** I_n

Exercício6: Determine, caso exista, a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$